الاثنين 9 / 4 / 2018 م .

نقول عن رأسين u, v أنهما متجاوران إذا كانت الثنائية $e = (u, v) \in A(D)$ قوس موجه يصل بين الرأسين .

• $(u, v) \neq (v, u)$ في البيان الموجه

ونقول أن القوس e بداية الرأس u ونهايته الرأس v وأن الرأسين u, v يقعان على القوس e.

المحاضرة الخامسة :

الدرجة الداخلية والدرجة الخارجية للرأس v :

• الدرجة الخارجية للرأس v : تمثل عدد الأضلاع الموجهة الخارجة من الرأس v ، ونرمز لها بالرمز :

$$\rho^+(v) \quad \text{أو} \quad od(v)$$

• الدرجة الداخلية للرأس v : هو عدد الأضلاع الموجهة الداخلة للرأس v ونرمز له بالرمز :

$$\rho^-(v) \quad \text{أو} \quad id(v)$$

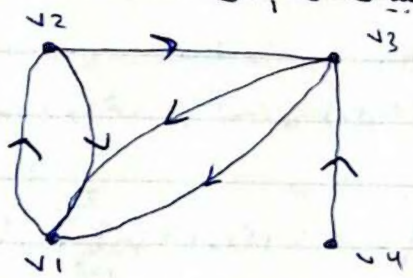
بالإضافة للعروات الموجهة = 2 درجتين

• درجة الرأس v هو مجموع الدرجتين الداخلية والخارجية أي :

$$\rho(v) = \rho^+(v) + \rho^-(v)$$

$$\text{أو} \quad deg(v) = od(v) + id(v)$$

مثال : ليكن البيان G الممثل :



• $od(v_1) = 1$, $id(v_1) = 3$

$\Rightarrow deg(v_1) = 4$

• $od(v_2) = 2$, $id(v_2) = 1$

$\Rightarrow deg(v_2) = 3$

• $od(v_3) = 2$, $id(v_3) = 2$

$\Rightarrow deg(v_3) = 4$

• $od(v_4) = 1$, $id(v_4) = 0$

$\Rightarrow deg(v_4) = 1$

ALADIB.net

في البيان الموجه مجموع عدد الرؤوس = ضعف عدد الأضلاع

مبرهنة:

لتكن $D(V,A)$ بيان موجه رتبته p وقياسه q

فإن:

$$\sum_{i=1}^{p} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{p} d^{-}(v_i) = q \quad \text{عدد الأضلاع}$$

في المثال السابق:

$$6 = 6 = 6$$

البيانان الإيزومورفيان (المتماثلان):

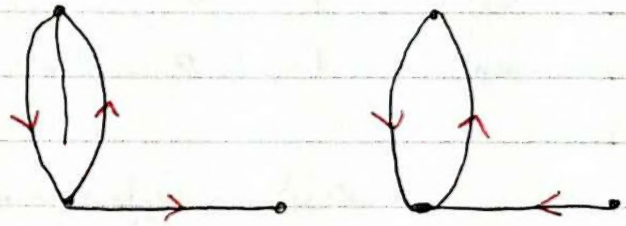
- نقول عن البيانين الموجهين D_1, D_2 إنهما إيزومورفيان إذا وجد تقابل ϕ بين واحد إلى واحد (متباين وغامر) من $V(D_1)$ إلى $V(D_2)$ يحافظ على التجاور أي إذا كان $u, v \in V(D_1)$ يتحقق ما يلي:

$$uv \in A(D_1) \Rightarrow \phi(u)\,\phi(v) \in A(D_2)$$

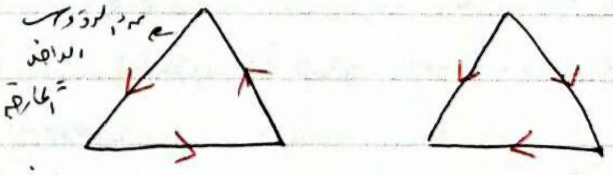
- البيان الموجه البسيط:

هو بيان موجه يحتوي على عروات موجهة ولا يحتوي على ضلعين موجهين من رأس إلى آخر بنفس الاتجاه.

مثال:



بسبب وجود ضلع داخلي وضلع خارجي لذا غير متماثلين



لها نفس الرؤوس ومتصلة بالاتجاه لذا البيانين غير متماثلين.

- البيان الموجه المتناظر:

لتكن البيان الموجه $D(V,A)$ رتبته p وقياسه q

نقول عن البيان الموجه D أنه متناظر إذا كان $(u,v) \in A(D) \Rightarrow (v,u) \in A(D)$ قوس

- ويكون البيان الموجه دوري إذا كان يصل بين كل رأسين قوس واحد فقط. (باتجاه واحد أو الاتجاهين معاً)

- لتكن لدينا البيان الموجه $D(V,A)$ متناظر

$q = p(p-1)$ عدد الأضلاع

البيان موجه متناظر تام إذا كان من أجل كل رأس $v \in V(D)$ يكون $od(v) = id(v) = p-1$

- ويكون البيان الموجه D منتظم من الدرجة r إذا كان لأجل كل رأس $v \in V(D)$ يكون

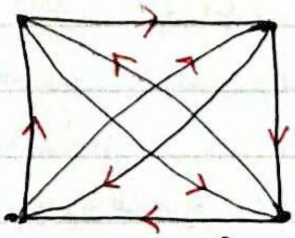
$$od(v) = id(v) = r$$

مثال: ونرمز له بالرمز D_r.

D_1

$$od(v) = id(v) = 1$$

مثال:



D_2

بيان موجه منتظم من الدرجة $r=2$

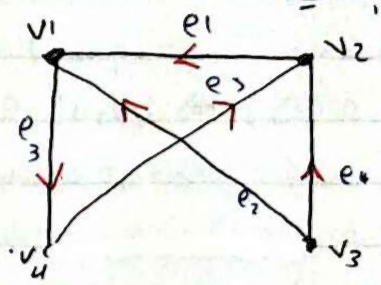
- الخصوصيات في البيان الموجه:

المسار: رأسي بداية v_i ونهاية الرأس v_i نفسه

/ /

1] مصفوفة التجاور:

ليكن البيان التالي:



4 رؤوس
5 أضلاع موجهة

- مصفوفة التجاور هي مصفوفة مربعة من المرتبة $p \times p$ معرفة بالشكل

$$A_1(D) = [a_{ij}] = \begin{cases} 1 ; & v_i v_j \in A_1(D) \\ 0 ; & v_i v_j \notin A_1(D) \end{cases}$$

اذا كان يوجد رأس من v_i إلى v_j

حسب الرسمة

$$A_1(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(v_1, v_4)
(v_4, v_1)

2] مصفوفة التقاطع:

هي مصفوفة مستطيلة قياسها $p \times q$ وتعطى بالشكل

$$B_1(D) = [b_{ij}] = \begin{cases} 1 ; & \text{الرأس } v_i \text{ بداية للقوس } e_j \\ -1 ; & \text{الرأس } v_i \text{ نهاية للقوس } e_j \\ 0 ; & \text{عندما لا يقع القوس } e_j \text{ على الرأس } v_i \end{cases}$$

في المثال السابق:

$$B_1(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3] مصفوفة الوصول:

هي مصفوفة مربعة قياسها $p \times p$ وتعطى بالشكل:

$$R_1(D) = [r_{ij}] = \begin{cases} 1 ; & \text{اذا كان يوجد مسار من الرأس } v_i \text{ إلى الرأس } v_j \\ 0 ; & \text{اذا كان لا يوجد مسار من الرأس } v_i \text{ الى } v_j \end{cases}$$

في المثال السابق

المسار حسب الرسمة نطلقه من v_i ونصل حسب الرسمة الى v_j

$$R_1(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- منقول البيان الموجه:

ليكن البيان الموجه $D(V, A)$ مجموعة أضلاعه

$$A(D) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$$

نستبدل مكان كل ضلع برأس فنحصل على مجموعة الرؤوس

$$V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$$

ALADIB.net

والتي هي رؤوس لبيان جديد H ويسمى مقول البيان الموجه $D(V, A)$

أي ينتمي للمقول

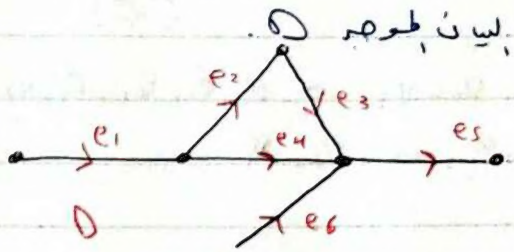
ويكون $e_i e_j \in A(L(D))$

اذا كان:

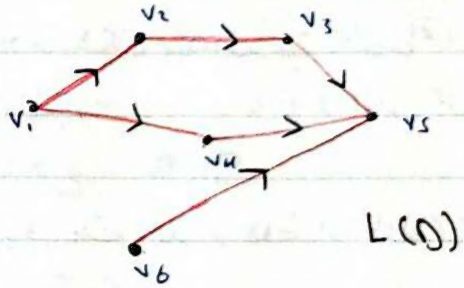
$e_i \in A(D)$, $e_j \in A(D)$

مثال:

لدينا البيان الموجه D



للحصول على المقول سنتبع كل ضلع برأس



$L(D)$

المسارات والترابط:

- يوجد في الواقع الكثير من المشاكل التي تواجهنا في وسائل النقل من سيارة، باص ..... الخ. لذلك هدفنا دائماً هو اختيار أقصر الطرق للوصول إلى المكان المحدد. فعندما ننطلق من المنزل إلى الجامعة نمر بعدة مواقف أو محطة نسمي عقدة (رأس vertix) وبين المحطة والمحطة يوجد خط مستقيم أو خط منحني لا يقطع نفسه نسمي بالضلع لذلك هذه الرحلة اليومية من المنزل الى الجامعة تشكل ما يسمى بالبيان والمكون من رؤوس وأضلاع والذي نطلق عليه اسم المسار ويكون هدفنا دائماً هو البحث عن أقصر المسارات للوصول الى المكان المحدد.

المسارات والحلقات:

- لتكن لدينا البيان $G(V, E)$ مرتبته P ورتبته q مجموعة رؤوسه $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ومجموعة أضلاعه $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ ولتكن u, v رأسين في البيان أي $u, v \in V(G)$ نسمي $W = u \overset{\text{شخطة}}{-} v$ (walk) مسلك من الرأس u إلى الرأس v اذا كان W متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع (على أن نبدأ برأس).

والتي تعطى بالشكل الآتي:

نبدأ برأس

$$W = u = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}$$

ينتهي برأس

$$v_k = v$$

نسمي $u = v_0$ رأس بداية المسلك.

ونسمي $v = v_k$ رأس نهاية المسلك.

حيث الضلع يبدأ برأس سابق وينتهي برأس لاحق أي

$$e_i = v_i v_{i+1}$$

k: تمثل عدد الأضلاع وهو طول المسلك.

اذا كان $k = 0$ نحصل على مسلك مكون من رأس واحد ويسمى بالمسلك التافه.

- في المسلك يكون كل ضلعين متتاليين متجاورين والعكس غير صحيح، أي اذا كانت لدينا متتالية من الأضلاع يمكن أن لا تشكل مسلكاً.

ملاحظة:

يمكن في المسلك الاستغناء عن الرؤوس وكتابة الأضلاع فقط.

ALADIB.net

مثال: ليكن لدينا البيان

لتكن لدينا المتتالية e_1, e_2, e_3, e_4 من الأضلاع هذه المتتالية من الأضلاع لا تشكل مسلكاً لأنه لو كتبنا المسلك على شكل متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع

$W = v_1, e_1, v_0, e_2, v_2, e_3,$

لا يمكن الوصول لأن e_3 لا تقع على الرأس v_2

لأن الضلع e_3 لا يقع على الرأس v_2

أما المتتالية $e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4$

تشكل مسلك في البيان لأنه عند كتابتها على شكل متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع

$v_1, e_1, v_0, e_2, v_2, e_2, v_0, e_3, v_3, e_3, v_0, e_4, v_4$

$= w = v_1 - v_4$

ملاحظة:

في المسلك يمكن أن تتكرر الرؤوس والأضلاع كما في المثال السابق.

- المسلكان المتساويان:

- لتكن

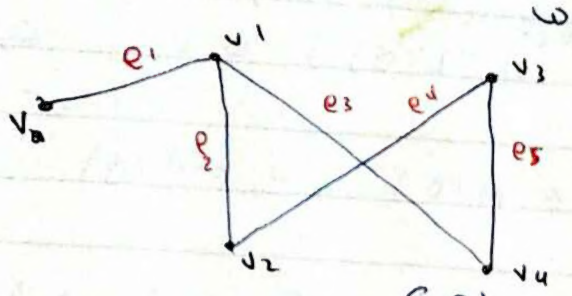
$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots e_{n-1}, v_n = v$

$u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \dots e_{m-1}, u_m = v$

نقول عن مسلكين إنهما متساويين إذا كان $n = m$ و $u_i = v_i$ (نفس الرؤوس ونفس الأضلاع)

- نقول عن المسلك W_1 محتوى في المسلك W_2 إذا كانت المتتالية المتناوبة W_1 متتالية جزئية من المتتالية W_2

مثال: ليكن لدينا البيان G ولتشكل المسلكين W_1, W_2



(G)

$W_1 = v_0 - v_1 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_4, v_3, e_5, v_4, e_3, v_1$

$W_2 = v_0 - v_1 = v_0, e_1, v_1, e_3, v_4, e_5, v_3, e_4, v_2, e_2, v_1$

W_1, W_2 مسلكين مختلفين يشكلان نفس المسلك الذي بدايته الرأس v_0 ونهايته الرأس v_1

عدد الأضلاع $q = 5$

- نسمي المسلك W دلالة إذا كان لا يحتوي على أضلاع متكررة.
- نسمي المسلك W مساراً إذا كان لا يحتوي على رؤوس متكررة.